ECOLE SUPERIEURE de PLASTURGIE

Option SUP

CONCOURS D'ENTREE 2000 : Epreuve de MATHEMATIQUES

Durée : 4 Heures

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées, dans les conditions définies dans la circulaire n° 99-018 du 1er Février 1999.

La clarté et la rigueur des raisonnements, ainsi que la qualité de la rédaction (présentation, lisibilité, orthographe) seront des éléments importants d'appréciation des copies.

Les deux problèmes sont indépendants.

—

Problème d'algèbre.

$M_3(\mathbb{R})$ est la $\mathbb{R}$-algèbre des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.

Pour tout triplet (a, b, c) de nombres réels, on note $T(a, b, c)$ la matrice $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$.

On considère l'ensemble $S = \{T(a, b, c) \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$

On pose $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Partie A.

1) Montrer que S est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$.
   Préciser une base de S et sa dimension.
2) a) Exprimer A^2, B^2, AB et BA à l'aide de I, A et B.
   b) Soient $(a, b, c), (a', b', c') \in \mathbb{R}^3$, $M = T(a, b, c)$, $M' = T(a', b', c')$. Calculer le produit MM'.
   c) Montrer que S est un sous-anneau de $M_3(\mathbb{R})$. Est-il commutatif ?
   d) L'anneau S est-il un corps ?
3) Cette question est consacrée à la recherche des éléments inversibles de l'anneau S. On fixe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, et on pose $M = T(a, b, c)$.
   a) Calculer le déterminant de la matrice M, et factoriser le résultat.
   b) On reprend les notations de la question 2b). Calculer, lorsque c'est possible, les réels a', b' et c' à l'aide de a, b et c pour que $MM' = I$.
   c) Quels sont les éléments inversibles de l'anneau S ?

Partie B.

Dans cette partie, E est un espace vectoriel euclidien de dimension 3 et (e_1, e_2, e_3) est une base orthonormée directe de E.

1) a) Montrer que $T(a, b, c)$ est une matrice orthogonale si et seulement si $\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ b^2 + 2ac = 0 \\ b(a+c) = 0 \end{cases}$.
   b) En déduire toutes les matrices orthogonales appartenant à S. Préciser parmi ces matrices celles dont le déterminant est positif.

2) On note u l'endomorphisme de E de matrice B dans la base (e_1, e_2, e_3). Reconnaître u, et préciser ses caractéristiques géométriques.

3) Soit $C = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et v l'endomorphisme de matrice C dans (e_1, e_2, e_3). Reconnaître v et préciser ses éléments géométriques.

Partie C.

Dans cette partie, on pose $K = \frac{1}{\sqrt{2}} A$ et $M = T(1, \sqrt{2}, 0)$. On se propose de calculer les puissances de K, puis celles de M.

1) Calculer K^2, K^3, puis K^n (pour $n \in \mathbb{N}^*$) en distinguant les cas n pair et n impair.

2) Exprimer M à l'aide de I et de K, et montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $M^n = I + a_n K + b_n K^2$,

avec $a_n = \sum_{1 \le k \le n \text{ et } k \text{ impair}} C_n^k 2^k$ et $b_n = \sum_{1 \le k \le n \text{ et } k \text{ pair}} C_n^k 2^k$

3) Calculer $1 + a_n + b_n$, puis $1 - a_n + b_n$. En déduire a_n et b_n en fonction de n.

4) Conclure en exprimant M^n comme combinaison linéaire de I, A et B.

Fin du problème.

Problème d'Analyse.

Dans tout le problème, f désigne l'application de $\mathbb{R}_+^*$ vers IR telle que $\forall t > 0, f(t) = \dfrac{1}{t+1-e^{-t}}$. Pour tout réel $x > 0$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_x^{2x} f(t)\,dt$. On ne cherchera pas à calculer F(x). La première partie est consacrée à l'étude de f, la deuxième à l'étude de la solution de l'équation $f(x) = 1$, la troisième à l'étude de la fonction F.

Partie I.

1) Etudier f : sens de variation, limites en 0 et en $+\infty$.
2) Etudier la concavité de f. Représenter graphiquement f.
3) Montrer que f induit une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur lui-même. On désigne par f^{-1} l'application réciproque. Préciser le sens de variation et les limites de f^{-1}.
4) Pour tout entier naturel non nul n, on désigne par x_n la solution de l'équation $f(x) = n$.
   a) Quel est le sens de variation de la suite $(x_n)_{n\geq 1}$? Est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?
   b) Déterminer le nombre réel a tel que $f(t) \sim \dfrac{a}{t}$ lorsque $t \to 0$.
   c) En déduire un équivalent simple de x_n lorsque $n \to +\infty$.

Partie II.

Cette partie est consacrée à la recherche d'une valeur approchée par la méthode du point fixe du nombre réel x_1 défini en question I,4). On note $\beta = x_1$.

1) Montrer que β est l'unique solution sur IR de l'équation $e^{-x} = x$, et justifier que $\dfrac{1}{e} \leq \beta \leq 1$.
2) Soient g l'application de IR vers IR telle que $g(x) = e^{-x}$, et I l'intervalle $\left[\dfrac{1}{e}, 1\right]$. Montrer que $g(I) \subset I$, et déterminer un réel $k \in]0,1[$ tel que $\forall x \in I, |g'(x)| \leq k$.

3) On considère la suite $(y_n)_{n\geq 0}$ de nombres réels telle que

$$\begin{cases} y_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ y_{n+1} = e^{-y_n}. \end{cases}$$

a) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N},\ y_n \in I$.

b) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ |y_n - \beta| \leq k^n |1 - \beta|$.

c) La suite (y_n) est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?

d) Déterminer un entier n_0 tel que $\forall n \geq n_0, |y_n - \beta| \leq 10^{-6}$.

e) Quelle est la valeur de y_{n_0} fournie par votre calculatrice ?

f) Conclure.

Partie III.

Cette partie, indépendante de la partie II, est consacrée à l'étude de l'application F de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$ telle que

$F(x) = \int_x^{2x} f(t)\,dt$.

1) Etude en $+\infty$.

a) Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \frac{1}{t+1} \leq f(t) \leq \frac{1}{t}$.

b) En déduire la limite L de F en $+\infty$.

2) Sens de variation.

a) En utilisant une primitive φ de f sur $\mathbb{R}_+^*$, montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que

$\forall x > 0,\ F'(x) = 2f(2x) - f(x)$.

b) Etudier le sens de variation de F sur $\mathbb{R}_+^*$.

3) Etude de F au voisinage de 0 .

On rappelle que $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + o(t^3)$ lorsque $t \to 0$.

a) Montrer qu'il existe trois réels a, b, c que l'on déterminera et une application continue ε de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$ tels que :

$$\begin{cases} f(t) = \frac{a}{t} + b + ct + t\varepsilon(t) \\ \lim_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0 . \end{cases}$$

b) Montrer que $\int_x^{2x} t\,\varepsilon(t)\,dt = o(x^2)$ lorsque $x \to 0$ (indication : on pourra poser $m_x = \text{Max}\ \{ |\varepsilon(t)|, t \in [x, 2x] \}$, et justifier que $\lim_{x \to 0} m_x = 0$).

c) Ecrire le développement limité d'ordre 2 de F en 0^+, sous forme $F(x) = a_1 + b_1 x + c_1 x^2 + o(x^2)$.

d) On prolonge F par continuité en 0 en posant $F(0) = a_1$. F est-elle dérivable en 0 ? Quelles conclusions graphiques peut-on tirer du résultat obtenu en c) ?

4) Donner une allure de la représentation graphique de f, en faisant apparaître sur le dessin les conclusions obtenues dans les questions précédentes.

Fin du problème.